

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

§10.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

Конфигурация объемного резонатора может быть любой, однако наибольшее практическое применение находят прямоугольный (рис. 10.1), цилиндрический (рис. 10.2), коаксиальный (рис. 10.3) и квазистационарный торовидный (рис. 10.4) объемные

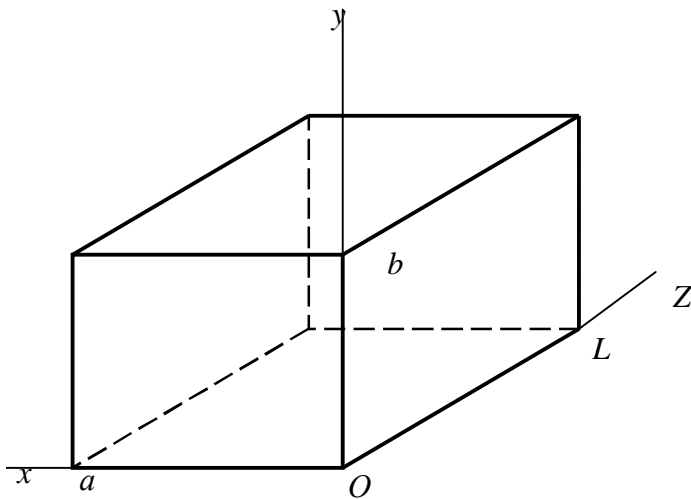


Рис. 10.1

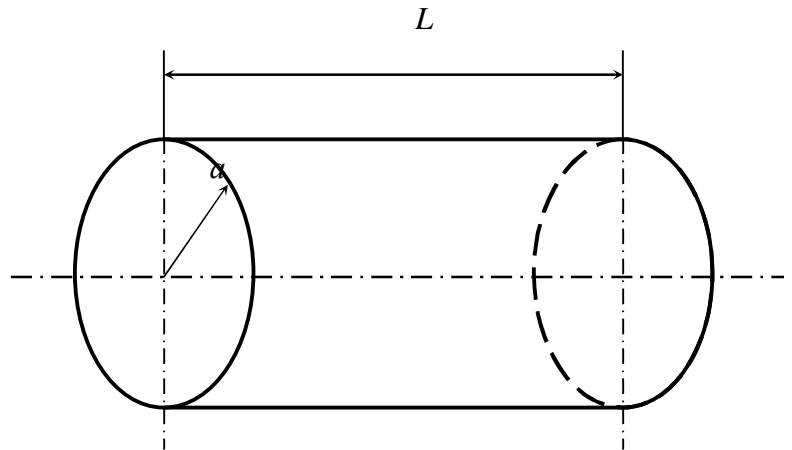


Рис. 10.2

резонаторы. Все они, кроме последнего, являются по существу закороченными на концах отрезками волноводов.

В таких резонаторах могут существовать колебания типа Е, у которых $H_z = 0$, и колебания типа Н, у которых $E_z = 0$. Анализ полей в резонаторах производят посредством

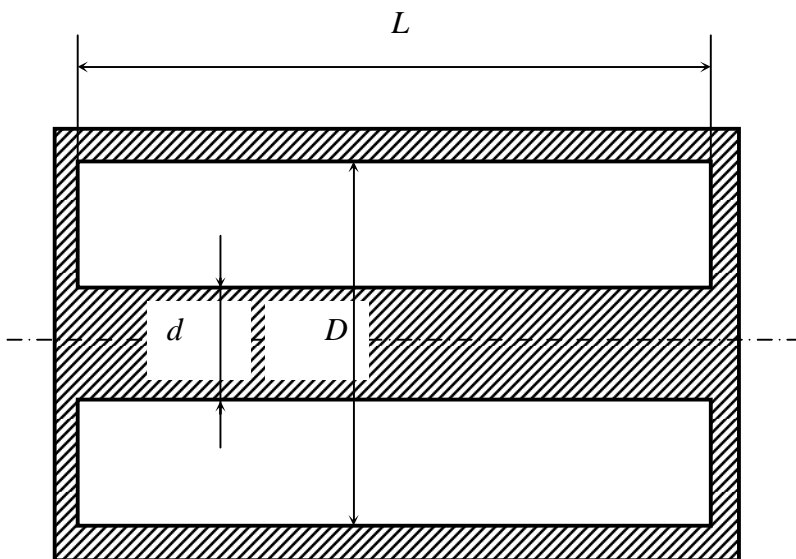


Рис. 10.3

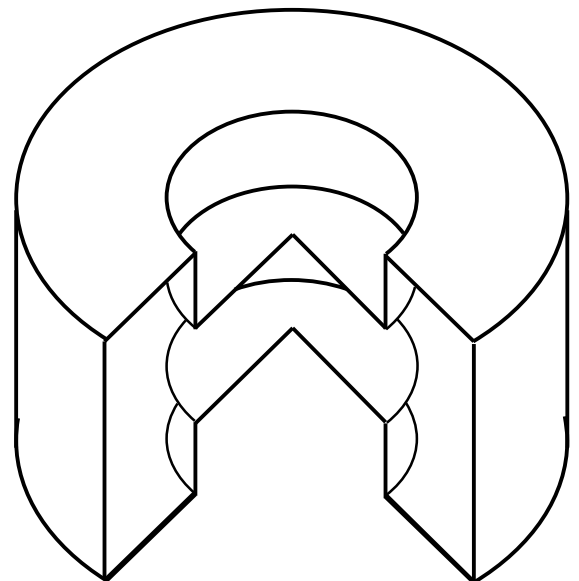


Рис. 10.4

решения уравнения Гельмгольца для составляющих E_z и H_z при равенстве нулю тангенциальной составляющей электрического поля на стенках резонатора [21].

В результате получаются выражения для резонансной частоты для составляющих векторов поля в резонаторе.

Прямоугольный объемный резонатор. Резонансная частота колебаний типа H_{np} или E_{mnp}

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a m_a}} \sqrt{\left(\frac{pm}{a}\right)^2 + \left(\frac{pn}{b}\right)^2 + \left(\frac{pp}{l}\right)^2}, \quad (10.1)$$

где a, b, l — геометрические размеры резонатора (см. рис. 10.1). Составляющие векторов поля для колебаний типа H_{mnp} :

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= jwm_a C \frac{pn}{b} \cos\left(\frac{pmx}{a}\right) \sin\left(\frac{pny}{b}\right) \sin\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{E}_y &= -jwm_a C \frac{pm}{a} \sin\left(\frac{pmx}{a}\right) \cos\left(\frac{pny}{b}\right) \sin\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{E}_z &= 0, \\ \vec{H}_x &= -C \frac{pm}{a} \frac{pp}{l} \sin\left(\frac{pmx}{a}\right) \cos\left(\frac{pny}{b}\right) \cos\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{H}_y &= C \frac{py}{b} \frac{pp}{l} \cos\left(\frac{pmx}{a}\right) \sin\left(\frac{pny}{b}\right) \cos\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{H}_z &= C \left[\left(\frac{pm}{a}\right)^2 + \left(\frac{pn}{b}\right)^2 \right] \cos\left(\frac{pmx}{a}\right) \cos\left(\frac{pny}{b}\right) \sin\left(\frac{ppz}{l}\right) \delta \end{aligned} \quad (10.2)$$

где C — произвольный амплитудный множитель.

Составляющие векторов поля для колебаний типа E_{mnp} :

$$\begin{aligned} \vec{H}_x &= jwe_a C \frac{pn}{b} \sin\left(\frac{pmx}{a}\right) \cos\left(\frac{pny}{b}\right) \cos\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{H}_y &= -jwe_a C \frac{pm}{a} \cos\left(\frac{pmx}{a}\right) \sin\left(\frac{pny}{b}\right) \cos\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{H}_z &= 0, \\ \vec{E}_x &= -C \frac{pm}{a} \frac{pp}{l} \cos\left(\frac{pmx}{a}\right) \sin\left(\frac{pny}{b}\right) \sin\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{E}_y &= -C \frac{py}{b} \frac{pp}{l} \sin\left(\frac{pmx}{a}\right) \cos\left(\frac{pny}{b}\right) \sin\left(\frac{ppz}{l}\right), \\ \vec{E}_z &= C \left[\left(\frac{pm}{a}\right)^2 + \left(\frac{pn}{b}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{pmx}{a}\right) \sin\left(\frac{pny}{b}\right) \cos\left(\frac{ppz}{l}\right). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Индексы m, n, p означают число вариаций поля в резонаторе по осям x, y , и z соответственно.

Основным типом колебаний в прямоугольном резонаторе, имеющим минимальную резонансную частоту, в зависимости от соотношения размеров a, b , и l могут быть H_{101} , H_{011} или E_{110} . Например, при $b < a$ и $b < l$ основным типом колебаний является H_{101} , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.5, а составляющие векторов поля описываются выражениями

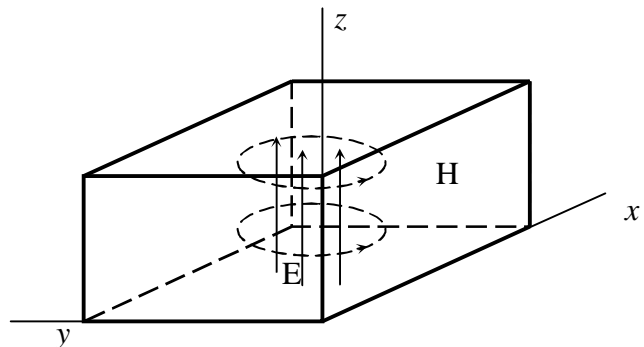


Рис. 10.5

$$\begin{aligned}
\vec{E}_x &= 0, \\
\vec{E}_y &= -j\omega m_a C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\
\vec{E}_z &= 0, \\
\vec{H}_x &= -C \frac{\pi^2}{al} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\
\vec{H}_y &= 0, \\
\vec{H}_z &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).
\end{aligned} \tag{10.4}$$

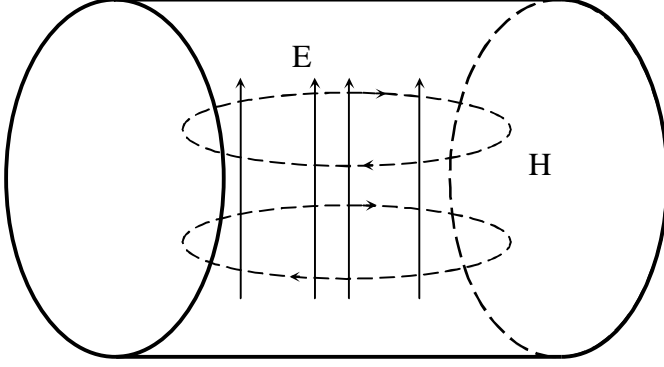


Рис. 10.6

Картина силовых линий поля колебаний H_{011} и E_{110} отличается лишь ориентацией векторов. Например, вектор E у колебания H_{011} ориентирован в направлении оси y , а у колебания E_{110} , — в направлении оси x . В резонаторе кубической формы резонансные частоты этих трех типов колебаний совпадают (явление вырождения).

Цилиндрический объемный резонатор. Резонансная частота колебаний типа H_{mnp}

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a m_a}} \sqrt{\left(\frac{m_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{pp}{l}\right)^2}, \tag{10.5}$$

где ϵ_a , μ_a — абсолютные диэлектрические проницаемости вещества, заполняющего резонатор; μ_{mn} — n -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$.

Индекс p , определяющий число вариаций поля вдоль оси z , принимает целочисленные значения, не равные нулю.

Составляющие векторов поля колебания типа H в цилиндрическом резонаторе:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r &= \frac{j\omega\omega_a}{r} m C J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \sin(mj) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
\vec{E}_j &= j\omega\omega_a C \frac{\mu_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \cos(mj) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
\vec{E}_z &= 0 \\
\vec{H}_r &= C \frac{\mu_{mn}}{a} \frac{\pi p}{l} J'_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \cos(mj) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
\vec{H}_j &= -C \frac{1}{r} \frac{\pi p m}{l} J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \sin(mj) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
\vec{H}_z &= C \left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \cos(mj) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right)
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Основным колебанием типа H в цилиндрическом резонаторе является H_{111} , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.6.

Резонансная частота колебаний типа E_{mnp}

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a m_a}} \sqrt{\left(\frac{n_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{pp}{l}\right)^2}, \tag{10.7}$$

где n_{mn} — n -й корень функции Бесселя $J_m(x)$.

Составляющие векторов поля колебаний типа E в цилиндрическом резонаторе описываются выражениями:

$$\begin{aligned}
H_r &= -\frac{j\omega\omega_d}{r} m C J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(mj) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
H_j &= -j\omega\omega_d C \frac{v_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(mj) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
H_z &= 0 \\
E_r &= -C \frac{v_{mn}}{a} \frac{\pi p}{l} J'_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(mj) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
E_j &= C \frac{l}{r} \frac{\pi p m}{l} J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(mj) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right) \\
E_z &= C \left(\frac{v_{mn}}{a} \right)^2 J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(mj) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right)
\end{aligned} \tag{10.8}$$

В отличие от колебаний типа Н индекс p здесь может принимать нулевое значение.

Основным колебанием типа Е в цилиндрическом резонаторе является $E_{,10}$. картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.7. Особенностью этого колебания является то, что его резонансная частота

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a m_a}} \frac{2,4048}{a}. \tag{10.9}$$

не зависит от длины резонатора.

В общем случае, когда резонатор представляет собой закороченный с обоих концов отрезок произвольного волновода, резонансную длину волны определяют из условия

$$l = p \frac{l_B}{2}, \tag{10.10}$$

где p — целое число (продольный индекс); λ_B — длина волны в волноводе (линии передачи).

Из выражения (10.10) получается формула для резонансной частоты:

$$w_p = \frac{p p v_\phi}{l}, \tag{10.11}$$

где v_ϕ — фазовая скорость волны в линии передачи, на базе которой выполнен резонатор.

В частности, для основного колебания типа T_1 объемного резонатора представляющего собой закороченный с обоих концов отрезок коаксиальной линии передачи (см. рис. 10.3),

$$w_p = \frac{p}{\sqrt{\epsilon_a m_a l}}. \tag{10.12}$$

В диапазоне дециметровых волн находят применение коаксиальные резонаторы, нагруженные на конденсатор (рис. 10.8). Резонансные частоты такого резонатора [12] определяют как решения уравнения

$$Z_B \operatorname{tg} \frac{w_p l}{c} = \frac{1}{w_p C_H}. \tag{10.13}$$

Здесь Z_B — волновое сопротивление коаксиальной линии передачи; c — скорость света; C_H — емкость конденсатора, на который нагружена линия.

Если линию передачи свернуть в кольцо, то образуется *резонатор бегущей волны*. Резонанс здесь наблюдается при условии, что длина резонатора / равна целому числу длин волн в линии, откуда

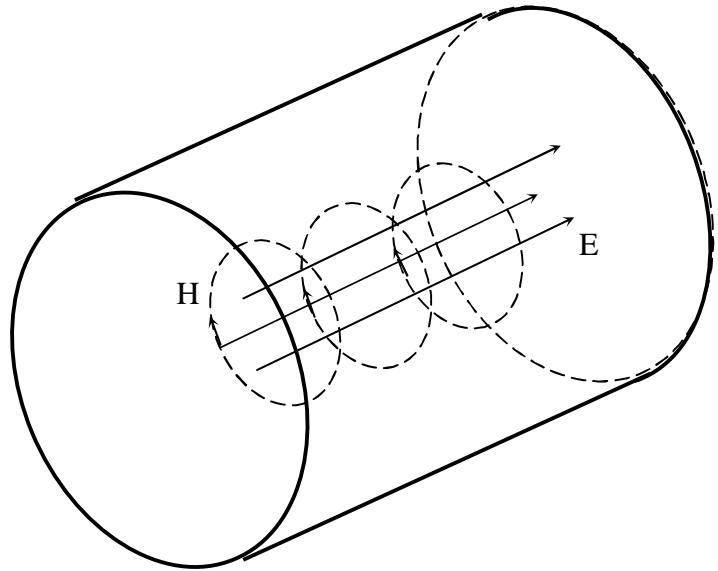


Рис.10.7

$$w_p = n \frac{2ppv_\phi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.14)$$

В некоторых электронных приборах СВЧ используют квазистационарные торовидные резонаторы (рис. 10.4); их расчет обычно проводят приближенно.

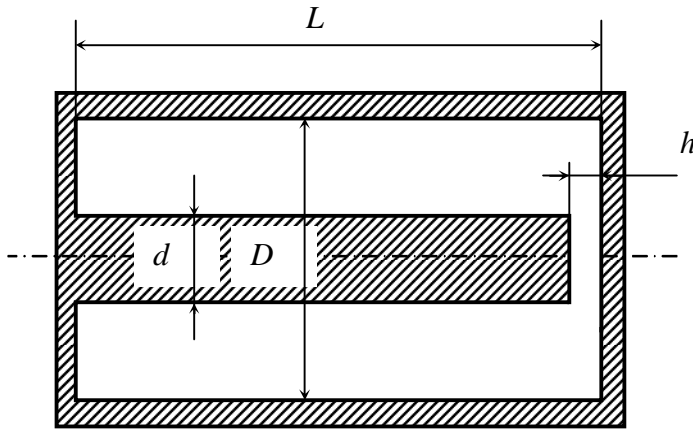


Рис. 10.8

Среднюю часть резонатора, образованную двумя параллельными дисками, рассматривают как конденсатор с емкостью $C = e_a \frac{pa^2}{d}$.

(10.15)

Параллельно ему включена индуктивность L , образованная стенками резонатора. Для резонатора, изображенного на рис. 10.4,

$$L = \frac{m_a h}{2p} \ln \frac{b}{a}, \quad (10.16)$$

где h — высота зазора.

Таким образом, считается, что квазистационарный торовидный резонатор эквивалентен колебательному контуру с резонансной частотой

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{e_0 m_0}{2} \frac{ha^2}{d} \ln \frac{b}{a}}}. \quad (10.17)$$

Энергия, запасенная в объемном резонаторе любого типа,

$$W = \int_V e_a \frac{E^2}{2} dV = \int_V m_a \frac{H^2}{2} dV, \quad (10.18)$$

где E и H — амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей; интегрирование ведется по объему резонатора.

В частности, для колебаний типов H_{101} , H_{011} , E_{110} в прямоугольном объемном резонаторе

$$W = e_a \frac{E_{\max}^2}{8} abl, \quad (10.19)$$

где E_{\max} — максимальная амплитуда напряженности электрического поля в резонаторе.

В цилиндрическом объемном резонаторе энергию, запасенную колебаниями различных типов, вычисляют по следующим формулам:

колебание типа E_{010}

$$W = 0,423 e_a E_{\max}^2 a^2 l; \quad (10.20)$$

колебание типа E_{011}

$$W = \frac{e_a E_{\max}^2 a^2 l}{4} \left[\frac{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{v_{01}}{a}\right)^2}{\left(\frac{v_{01}}{a}\right)^2} \right]; \quad (10.21)$$

колебание типа H_{101}

$$W = 0,316 e_a E_{\max}^2 a^2 l; \quad (10.22)$$

колебание типа H_{111}

$$W = 0,749 e_a E_{\max}^2 a^2 l. \quad (10.23)$$

Добротность объемного резонатора определяют как отношение энергии электромагнитного поля, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период собственных колебаний:

$$Q = \frac{w_p \int_V m_a |H|^2 dV}{R_s \oint_S |H_t|^2 dS}, \quad (10.24)$$

Для колебаний типа Н₁₁ в прямоугольном резонаторе

$$Q = \frac{m_a w_p}{2R_s} \frac{abl(a^2 + l^2)}{a^3(l + 2b) + l^3(a + 2b)}, \quad (10.25)$$

Добротность важнейших типов колебаний в цилиндрическом резонаторе рассчитывают по формулам:

колебание типа E₀₁₀

$$Q = \frac{m_a w_p}{2R_s} \frac{al}{a + l}; \quad (10.26)$$

колебание типа E₀₁₁,

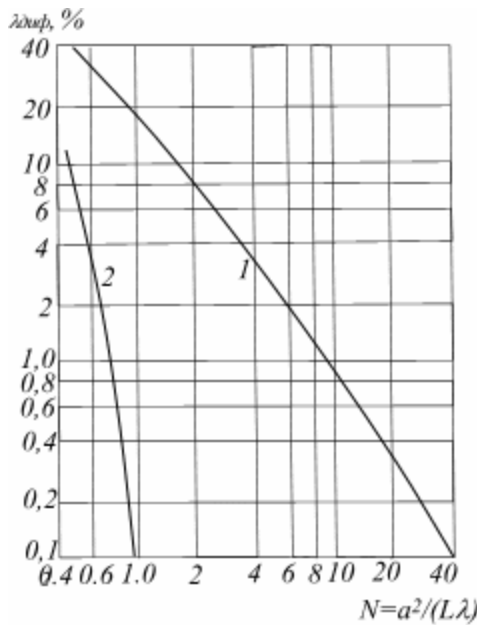


Рис. 10.9

$$Q = \frac{1}{1/Q_m + \operatorname{tg} d_s}, \quad (10.30)$$

где Q_m — добротность резонатора, обладающего лишь потерями в металлических стенках; $\operatorname{tg} d_s$ — тангенс угла потерь вещества, заполняющего резонатор.

В оптическом и инфракрасном диапазонах применяют *открытые* резонаторы, образованные двумя плоскими или сферическими зеркалами. В таких резонаторах существуют собственные электромагнитные колебания (моды) T_{mnp} , где индексы m , n , означают число вариаций поля в поперечных направлениях, а индекс p — число вариаций поля вдоль оси резонатора. Основной является мода T_{00p} .

Добротность открытых резонаторов определяется потерями в зеркалах и дифракционными потерями:

$$Q = \frac{2pl}{I_p} \frac{1}{1 - R^2 + a_{\text{диф}}}, \quad (10.31)$$

где R — коэффициент отражения от зеркала; $a_{\text{диф}}$ — относительная потеря мощности сигнала вследствие дифракции за один проход вдоль резонатора.

Дифракционные потери характеризуются волновым параметром

$$N = a^2 / (l\lambda), \quad (10.32)$$

где a — радиус зеркала; l — расстояние между зеркалами.

Благодаря меньшим дифракционным потерям наибольшее распространение получили конфокальные резонаторы, образованные зеркалами, радиус, кривизны которых равен длине резонатора.

$$Q = \frac{m_a w_p}{2R_s} \frac{al}{2a + l}; \quad (10.27)$$

колебание типа H₀₁₁

$$Q = \frac{m_a w_p}{2R_s} \frac{e_a w_p m_a a^2 l}{\frac{a^2}{l^2} p^2 + \frac{l}{a} m_0^2}; \quad (10.28)$$

колебание типа H₁₁₁

$$Q = \frac{m_a w_p}{2R_s} \frac{l_p \left(1 - \frac{1}{m_{11}}\right)^2 \left[m_{11}^2 + \left(\frac{pa}{l}\right)^2\right]^{3/2}}{2p \left[m_{11}^2 + \left(\frac{pa}{l}\right)^2 + \left(1 - \frac{2a}{l}\right) \left(\frac{pa}{lm_{11}}\right)^2\right]}. \quad (10.29)$$

В формулах (10.24) — (10.29) учитываются лишь потери в металлических стенках резонаторов. Если резонатор заполнен диэлектриком с потерями, то результирующая добротность

На рис. 10.9 приведен график зависимости дифракционных потерь для основной моды в резонаторах с плоскими 1 и конфокальными 2 сферическими зеркалами. При больших N для расчета дифракционных потерь могут быть использованы приближенные выражения:

$$a_{\text{диф}} \approx 0,3N^{-3} \quad (10.33)$$

-для резонатора с плоскими зеркалами,

$$a_{\text{диф}} \approx 10,9 \cdot 10^{4,94N} \quad (10.34)$$

-для резонатора с конфокальными зеркалами.

Резонансные частоты колебаний типа T_{mnp} в конфокальных резонаторах

$$f_{mnp} = \frac{c}{4l} (1 + 2p + 2m + n), \quad (10.35)$$

где c — скорость света.

Поперечное распределение поля основной моды T_{mnp} в конфокальном резонаторе описывается гауссовой функцией:

$$E = A e^{-r^2/w^2} \cos j, \quad (10.36)$$

где $w^2 = ll/p$ — на поверхности зеркала; $w^2 = ll/2p$ — в середине резонатора (в фокальной плоскости),

Высшие моды конфокального резонатора имеют значительно большие дифракционные потери, чем основная мода, что приводит к самофильтрации основной моды.

§ 10.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

10.1 Прямоугольный объемный резонатор имеет следующие размеры: $a = 20$ мм, $b = 25$ мм, $l = 30$ мм.

Определить резонансную длину волны двух низших типов колебаний. Как они обозначаются?

Решение. В прямоугольном резонаторе низшими могут быть колебания типов H_{101} , H_{011} и E_{110} , у которых один из индексов равен нулю, а два других — единице. Определим резонансную длину волны этих типов колебаний.

Запишем формулу для резонансной длины волны:

$$l_p = c / f_p = c 2p / w_p. \quad (10.37)$$

Подставляя в (10.37) выражение (10.1), получим

$$l_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (10.38)$$

Подставляя численные данные, найдем резонансные длины волн для указанных типов колебаний:

$$H_{101}, \lambda_p = 3,328 \text{ см.}$$

$$H_{011}, \lambda_p = 3,841 \text{ см,}$$

$$E_{110}, \lambda_p = 3,123 \text{ см.}$$

Таким образом, основным является колебание H_{011} у которого значение λ_p наибольшее, за ним следует колебание H_{101} .

10.2 Цилиндрический резонатор диаметром 6 см и длиной 5 см заполнен диэлектриком с параметрами $\epsilon = 2,5$; $\text{tg} \delta_s = 2 \cdot 10^{-4}$. Материал стенок — медь.

Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Найти резонансную частоту, добротность и полосу пропускания резонатора на этом типе колебаний.

Решение. Основным колебанием типа E в цилиндрическом резонаторе является E_{010} с резонансной частотой

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a m_a}} \sqrt{\left(\frac{2,405}{a}\right)^2}.$$

Основным колебанием типа H — H_{111} с резонансной частотой

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{e_a m_a}} \sqrt{\left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}.$$

Нетрудно убедиться что

$$\left(\frac{2,405}{a}\right)^2 < \left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2.$$

Поэтому основным является колебание типа E_{010} для которого

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{e_a m_a}} \sqrt{\left(\frac{2,405}{a}\right)^2} = 1,52 \cdot 10^{16} \text{ рад/с},$$

$$f_p = \frac{w_p}{2\pi} = 2,42 \text{ ГГц}.$$

Рассчитав добротность по формулам (10.26) и (10.30), получим $Q = 3680$. Полоса пропускания резонатора

$$2\Delta w = w_p / Q = 4.13 \cdot 10^6 \text{ рад/с} \text{ или } 2\Delta f = 685 \text{ кГц}.$$

10.3 Определить предельную энергию, которая может быть накоплена в коаксиальном резонаторе (см. рис. 10.3) с размерами $d = 10$ мм, $D = 40$ мм, $l = 80$ мм на основном типе колебаний. Максимально допустимая напряженность электрического поля 30 кВ/см.

Решение. Электрическое поле основной волны в коаксиальном резонаторе имеет только радиальную составляющую

$$E_r = \frac{A}{r} \sin\left(\frac{p_z}{l}\right), \quad (10.39)$$

где A — некоторый коэффициент.

Подставляя выражение (10.39) в (10.18), найдем энергию, запасенную в резонаторе:

$$W = \frac{p}{2} e_a A^2 l \ln \frac{D}{d}. \quad (10.40)$$

Максимальная напряженность электрического поля согласно (10.39) существует в середине резонатора на поверхности внутреннего проводника, т. е. при $r = d/2$. Ее значение равно

$$E_{\max} = \frac{2A}{d}$$

откуда

$$A = \frac{d}{2} E_{\max}. \quad (10.41)$$

Подставляя (10.41) в (10.40), получим формулу для расчета запасенной энергии:

$$W = \frac{p}{8} e_a E_{\max}^2 d l \ln \frac{D}{d} \quad (10.42)$$

или после численных подстановок

$$W = 0,3466 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

10.4 Кубический резонатор со сторонами 3 см работает на колебании типа E_{111} .

Найти резонансную частоту этого колебания, изобразить картину силовых линий поля и определить добротность резонатора, считая, что его стенки выполнены из меди.

Решение.

Резонансная частота колебания типа E_{111} в соответствии с формулой (10.1):

$$f_p = \frac{w_p}{2\pi} = 8,66 \text{ ГГц}.$$

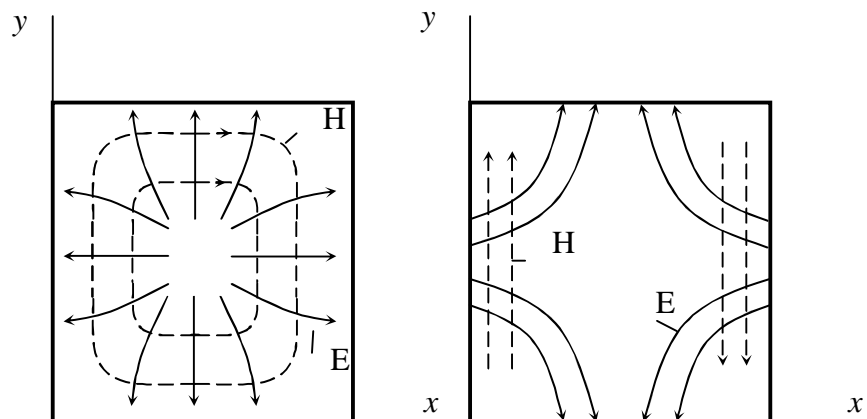


Рис. 10.10

Картина силовых линий поля колебания типа E111 в резонаторе определяется картиной силовых линий поля волны типа E11 в прямоугольном волноводе (см. рис. 7.4). Сначала изобразим картину электрических силовых линий так, чтобы получилась одна вариация поля вдоль оси z и выполнялись граничные условия на торцовых стенках резонатора. После этого можно изобразить картину магнитных силовых линий так, чтобы максимум напряженности поля наблюдался в сечении резонатора, где поперечные составляющие электрического поля равны нулю, т. е. при $z = 0$ и $z = a$. В результате получим картину силовых линий поля, изображенную на рис. 10.10.

Чтобы определить добротность резонатора, воспользуемся выражениями для составляющих вектора напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_x &= jwe_a C \frac{P}{a} \sin\left(\frac{px}{a}\right) \cos\left(\frac{pn}{a}\right) \cos\left(\frac{pz}{a}\right), \\ H_y &= -jwe_a C \frac{P}{a} \cos\left(\frac{px}{a}\right) \sin\left(\frac{pn}{a}\right) \cos\left(\frac{pz}{a}\right). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (10.29), получим

$$Q = \frac{w_p m_a \int_V (H_x^2 + H_y^2) dV}{R_s \oint_S |H_t|^2 dS}. \quad (10.43)$$

Вычислим интеграл в числителе выражения (10.43):

$$\int_V (H_x^2 + H_y^2) dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a |H_x^2 + H_y^2| dx dy dz = \left(we_a C \frac{P}{a} \right)^2 \frac{a^3}{4}. \quad (10.44)$$

Интеграл в знаменателе выражения (10.43) берут по всей поверхности резонатора и разбивают на шесть частей: интегралы по четырем боковым поверхностям ($x = 0$, $x = a$, $y = 0$,

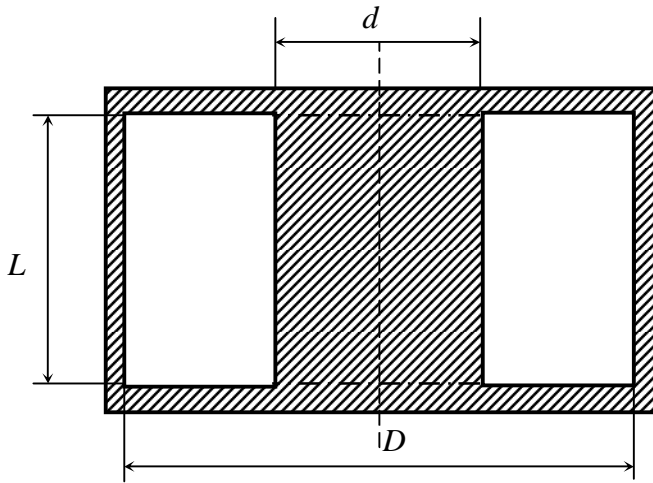


Рис. 10.11

$y = a$) и интегралы по двум торцовым поверхностям ($z = 0$, $z = a$). Вследствие симметрии поля интегралы по каждой из боковых поверхностей равны друг другу, поэтому достаточно вычислить один из них. Например, интеграл по поверхности $y = 0$:

$$\int_{S(y=0)} |H_t|^2 dS = \int_{x=0}^a \int_{z=0}^a |H_x|^2 dx dz = \left(we_a C \frac{P}{a} \right)^2 \frac{a^2}{4},$$

интеграл по торцовой стенке ($z=0$)

$$\int_{S(z=0)} |H_t|^2 dS = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a |H_x + H_y|^2 dx dy = \left(we_a C \frac{P}{a} \right)^2 \frac{a^2}{2}.$$

Суммируя результаты, найдем значение интеграла в знаменателе выражения (10.43):

$$\int_S |H_t|^2 dS = \left(we_a C \frac{P}{a} \right)^2 2a^2. \quad (10.45)$$

Подставляя (10.44) и (10.45) в (10.43), получим формулу для расчета добротности:

$$Q = \frac{m_a w_p a}{8R_s} = \frac{\sqrt{2m_a w_p s a}}{8}, \quad (10.46)$$

согласно которой $Q = 10\,470$.

10.5 Объемный резонатор представляет собой кольцевую полость, сечение которой изображено на рис. 10.11. Размеры резонатора: $D = 60$ мм, $d = 30$ мм, $l = 20$ см.

Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Изобразить картину силовых линий поля и найти резонансную частоту.

Решение. В рассматриваемом резонаторе низшими типами являются колебания, имеющие наиболее простую структуру поля. Это основной тип колебания T_1 коаксиального резонатора (рис. 10.12, а) и колебание типа E_{010} с картиной поля, изображенной на рис. 10.12, б. Определим резонансную частоту каждого из этих колебаний. Резонансную частоту колебаний типа T_1 определяют по формуле (10.12):

$$f_p = \frac{w_p}{2p} = 7,5 \text{ ГГц}.$$

Для нахождения резонансной частоты колебания типа E_{010} запишем уравнение Гельмгольца относительно продольной составляющей электрического поля E_z :

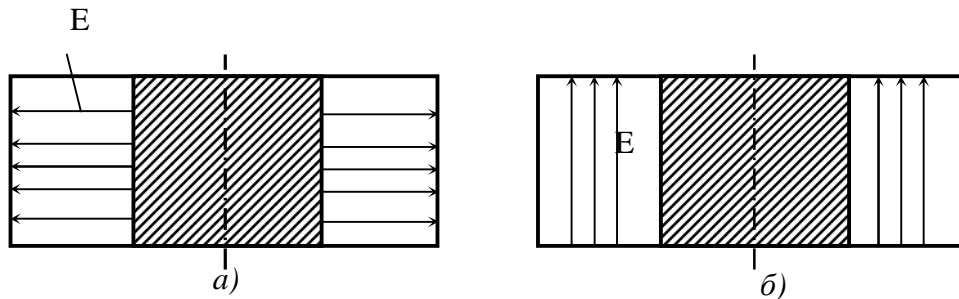


Рис. 10.12

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + b^2 E_z = 0. \quad (10.47)$$

Для колебания типа E_{010} составляющая E_z не зависит от ϕ и z , поэтому уравнение (10.47) упрощается:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r} + b^2 E_z = 0. \quad (10.48)$$

Решение этого уравнения, записываемое в виде

$$E_z = C_1 J_0(br) + C_2 N_0(br). \quad (10.49)$$

Должно удовлетворять граничным условиям

$$E_z|_{r=d/2} = 0, \quad E_z|_{r=D/2} = 0. \quad (10.50)$$

Подставим решение (10.49) в граничные условия (10.50)

$$0 = C_1 J_0\left(b \frac{d}{2}\right) + C_2 N_0\left(b \frac{d}{2}\right),$$

$$0 = C_1 J_0\left(b \frac{D}{2}\right) + C_2 N_0\left(b \frac{D}{2}\right).$$

Исключая C_1 и C_2 , получим трансцендентное уравнение для определения β :

$$J_0\left(b \frac{d}{2}\right) N_0\left(b \frac{D}{2}\right) - J_0\left(b \frac{D}{2}\right) N_0\left(b \frac{d}{2}\right) = 0. \quad (10.51)$$

Значения корней уравнения (10.51) можно найти по таблице в справочнике [7]. При $D/d=2$ первый корень уравнения (10.51) $b \frac{d}{2} = 3,123$, откуда

$$w_p = \frac{2 \cdot 3,123}{d \sqrt{\epsilon_0 m_0}} = 6,246 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$$

и

$$f_p = \frac{w_p}{2\pi} = 9,94 \text{ ГГц}.$$

Таким образом, в рассматриваемом резонаторе основным является колебание типа T_1 так как его резонансная частота минимальна.

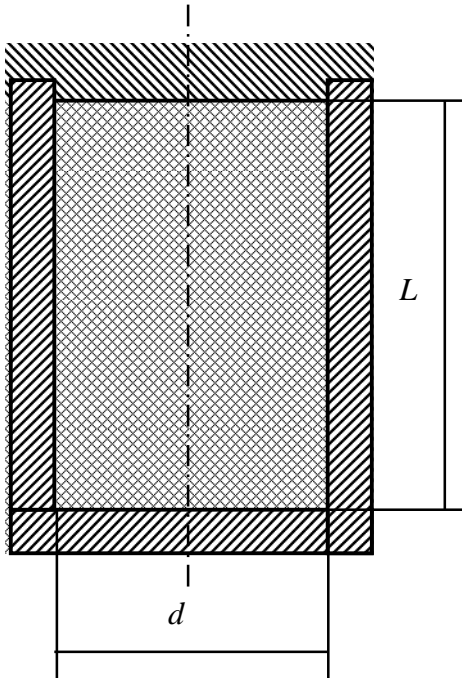


Рис.10.13

10.6 Для измерения параметров диэлектриков предлагается использовать цилиндрический резонатор со съемной крышкой (рис. 10.13). Внутренняя часть резонатора полностью заполняется исследуемым диэлектриком.

Выбрать тип колебаний резонатора, наиболее удобный для использования в данном устройстве. Вывести формулы для расчета диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь исследуемого материала, предполагая известными резонансные частоты резонатора без диэлектрика ω_{p0} и с диэлектриком ω_p , а также добротности резонатора без диэлектрика Q_0 и с диэлектриком Q .

Решение. В резонаторе разъемной конструкции рабочий тип колебаний должен быть выбран так, чтобы стык не пересекал линий тока. Этому условию удовлетворяют симметричные магнитные волны типа H_{0np} , не имеющие продольных составляющих тока. Из них целесообразно выбрать колебание типа H_{011} , имеющее минимальную резонансную частоту. Запишем выражение для резонансной частоты колебания типа H_{011} :

$$w_p = \frac{\sqrt{(m_{01}/a)^2 + (p/l)^2}}{\sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon_0 m_0}}.$$

Из этого выражения легко получить формулу для определения относительной проницаемости диэлектрика:

$$\epsilon = \frac{(3,832/a)^2 + (p/l)^2}{w_p^2 \epsilon_0 m_0}. \quad (10.52)$$

Добротность резонатора, заполненного диэлектриком, определяется выражением (10.30), где $\text{tg} \delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь; Q_M — добротность резонатора, обладающего лишь потерями в металлических стенках.

Как видно из выражения (10.28), Q_M зависит от частоты и относительной проницаемости диэлектрика, поэтому значение Q_M в резонаторе с диэлектриком отличается от добротности резонатора без диэлектрика Q_0 . Выведем формулу, связывающую величины Q_M и Q_0 . В соответствии с выражением (10.28)

$$Q_0 = \frac{m_0 w_{p0}}{2 \sqrt{\frac{m_0 w_{p0}}{2s}}} \frac{\epsilon_a w_{p0}^2 m_a a^2 l}{\left(\frac{a^2}{l^2} p^2 + \frac{l}{a} m_{01}^2 \right)},$$

$$Q_M = \frac{m_0 w_p}{2 \sqrt{\frac{m_0 w_p}{2s}}} \frac{\epsilon \epsilon_a w_p^2 m_a a^2 l}{\left(\frac{a^2}{l^2} p^2 + \frac{l}{a} m_{01}^2 \right)},$$

где ω_{p0} и ω_p — значения резонансных частот резонатора без диэлектрика и с диэлектриком.

Отношение этих двух выражений

$$\frac{Q_M}{Q_0} = \left(\frac{w_p}{w_{p0}} \right)^{5/2} e = e^{-1/4}, \quad (10.53)$$

откуда

$$Q_M = Q_0 \sqrt{e}.$$

Подставляя (10.53) в (10.30), после несложных преобразований получим формулу для определения $\text{tg } b_3$:

$$\text{tg } d_3 = \frac{1}{Q} - \frac{\sqrt[4]{e}}{Q_0}.$$

10.7 Резонатор лазера, работающего на длине волны 10,6 мкм, образован двумя конфокальными сферическими зеркалами с многослойным диэлектрическим покрытием; коэффициент отражения от поверхности зеркала равен 0,98. Диаметр зеркал 30 мм, расстояние между ними 1,2 м.

Найти частотный интервал между соседними модами резонатора и его добротность на основной моде. Определить радиус поля основной моды по уровню 0,1 от максимального значения у поверхности зеркала и в фокальной плоскости резонатора.

Решение. В соответствии с формулой (10.35) соседние моды резонатора различаются по частоте на величину

$$\Delta f = c / (4l) = 62,5 \text{ ГГц}.$$

Для определения добротности найдем волновой параметр

$$N = a^2 / (l\lambda) = 17,7,$$

в соответствии с формулой (10,32) $\alpha_{\text{диф}} = 4 \cdot 10^{-87}$

Таким образом, дифракционные потери в резонаторе пренебрежимо малы и его добротность определяется только потерями в зеркалах:

$$Q = \frac{2pl}{l_p} \frac{1}{1 - R^2} = 1,8 \cdot 10^7.$$

Распределение поля вдоль радиуса на основании формулы (10.36) имеет вид

$$\frac{E}{E_{\text{max}}} = e^{-r^2/w^2}.$$

Поле ослабляется в 10 раз на расстоянии от оси, равном $r_{0,1} = w\sqrt{\ln 10}$

У поверхности зеркала

$$w = \sqrt{l\lambda / p} = 2,01 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_{0,1} = 3,05 \text{ мм}$$

В фокальной плоскости резонатора

$$w = \sqrt{l\lambda / p} = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_{0,1} = 2,16 \text{ мм}$$

§ 10.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

10.8 Определить резонансную длину волны основного типа колебания в кубическом резонаторе со сторонами 2 см.

Ответ: 1,414 см.

10.9 Определить резонансные частоты колебаний типов E_{010} и H_{111} в цилиндрическом резонаторе, диаметр и длина которого одинаковы и равны 5 см.

Ответ: 4,593 и 4,622 ГГц соответственно.

10.10 Какой тип колебаний является основным в прямоугольном резонаторе с размерами $a = 2$ см, $b = 4$ см, $l = 3$ см? Определить его резонансную частоту. Какой тип колебаний является ближайшим высшим? Найти его резонансную частоту.

Ответ: Нош 6,25 ГГц; E_{110} , 8,38 ГГц.

- 10.11** Определить размеры кубического резонатора, низшая резонансная частота которого равна 5 ГГц.

Ответ: 4,243 см.

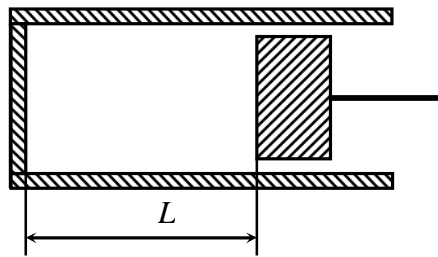


Рис.10.14

- 10.12** Перестраиваемый резонатор образован отрезком прямоугольного волновода сечением 23х10 мм, внутри которого перемещается поршень (рис. 10.14).

Определить пределы перемещения поршня для перестройки резонатора в пределах 8—12 ГГц. Тип колебания H_{101} .

Ответ: 14,89 мм < / < 32,37 мм.

- 10.13** При, каком отношении длины цилиндрического объемного резонатора к его радиусу резонансные частоты колебаний типов E_{010} и H_{111} будут одинаковыми?

Ответ: $\lambda_a = 2,03$.

- 10.14** Длина цилиндрического объемного резонатора вдвое больше его диаметра. Резонансная частота колебания типа E_{011} равна 6 ГГц.

Определить диаметр резонатора.

Ответ: 4,026 см.

- 10.15** Стороны прямоугольного объемного резонатора относятся как 3:2:1. Резонансная частота колебания типа E_{111} равна 8 ГГц.

Определить размеры резонатора.

Ответ: 65,62х43,75х21,88 мм.

- 10.16** Резонансная частота колебания типа E_{010} в цилиндрическом резонаторе равна 4 ГГц, резонансная частота колебания типа H_{111} = 5 ГГц.

Определить размеры резонатора.

Ответ: $a = 2,871$ см', $l = 3,795$ см.

- 10.17** Определить размеры прямоугольного объемного резонатора, три низшие резонансные частоты которого равны 10, 11 и 12 ГГц.

Ответ: 24,2 X 19,1 X 16,5 мм.

- 10.18** Стороны прямоугольного объемного резонатора относятся как 1:1,2:1,5.

Определить соотношение резонансных частот трех низших типов колебаний резонатора.

Ответ: 1:1,126:1,220.

- 10.19** Прямоугольный объемный резонатор с резонансной длиной волны 3 см на колебании типа H_{10} , образован отрезком стандартного прямоугольного волновода сечением 23 X 10 мм.

Определить длину резонатора.

Ответ: 3,957 см.

- 10.20** Определить резонансную частоту основного типа колебаний коаксиального резонатора, поперечное сечение которого приведено на рис. 10.3. Дано: $D = 20$ мм, $d = 12$ мм, $l = 60$ мм.

Ответ: 2,5 ГГц.

- 10.21** Незаполненный резонатор имеет резонансную частоту 6 ГГц.

Какова будет резонансная частота, если резонатор заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью $\epsilon = 2,7$?

Ответ: 3,65 ГГц.

- 10.22** В цилиндрическом объемном резонаторе возбуждается колебание типа E_{011} . Для исследования картины силовых линий поля в стенках резонатора необходимо прорезать узкие щели.

Указать расположение щелей, которые не окажут существенного влияния на поле этого колебания.

Ответ: продольные щели на боковой стенке и радиальные щели на торцевых стенках.

- 10.23** Прямоугольный объемный резонатор, предназначенный для измерения параметров вещества, должен быть сделан разъемным. Чтобы несовершенство контакта не изменяло параметров резонатора, стык не должен пересекать линий тока.

Можно ли удовлетворить этому требованию при работе на основном типе колебания? Если можно, то как должна проходить линия стыка частей резонатора?

Ответ: можно; решение не единственное; если, например, основным является колебание типа Н₁₀₁, то линия стыка может проходить так, как показано на рис. 10.15.

10.24 Кольцевой объемный резонатор (см. рис. 10.11) имеет размеры: $D = 40$ мм, $d = 20$ мм, $l = 5$ мм.

Какой тип колебаний является для него основным? Найти резонансную частоту. Изобразить картину силовых линий поля.

Ответ: 14,91 ГГц.

10.25 Определить резонансную частоту коаксиального резонатора, сечение которого изображено на рис. 10.8. Размеры резонатора: $D = 40$ мм, $d = 10$ мм, $l = 100$ мм, $h = 1,5$ мм.

Указание: расчет емкости C вести по приближенной формуле для плоского конденсатора.

Ответ: 713 МГц.

10.26 Для перестройки коаксиального резонатора (см. рис. 10.8) его центральный стержень можно перемещать вдоль оси. В каких пределах следует изменять зазор h для перестройки резонатора в диапазоне 300—600 МГц? Размеры резонатора: $D = 40$ мм, $d = 20$ мм, $l = 100$ мм.

Ответ: 0,158 — 1,341 мм.

10.27 Определить эквивалентные параметры и резонансную частоту квазистационарного торовидного объемного резонатора (а, рис. 10.4) с размерами: $2b = 60$ мм, $2a = 20$ мм, $h = 20$ мм, $d = 2$ мм

Ответ: $L = 4,4 \cdot 10^{-9}$ Гн, $C = 1,4 \cdot 10^{-12}$ Ф, $f_p = 2,036$ ГГц.

10.28 Прямоугольный объемный резонатор с размерами $a = 5$ см, $b = 3$ см, $l = 6$ см работает на основном типе колебаний. Стенки резонатора посеребрены, резонатор заполнен диэлектриком с параметрами $\epsilon = 2,3$, $\text{tg} \delta = 4 \cdot 10^{-4}$.

Определить резонансную частоту и добротность резонатора. Какова будет добротность резонатора при отсутствии потерь в диэлектрике?

Ответ: 2,575 ГГц, 2042, 11160.

10.29 Определить добротность цилиндрического объемного резонатора радиусом 5 см, работающего на волне 10 см. Тип колебания E_{011} , Материал стенок — медь.

Ответ: 17 970.

10.30 Определить резонансную частоту и добротность цилиндрического объемного резонатора, работающего на колебании типа H_{011} , Диаметр и длина резонатора 5 см, проводимость материала стенок $6,1 \cdot 10^7$ См/м.

Ответ: 7,93 ГГц, 37 450.

10.31 Цилиндрический объемный резонатор, длина которого равна диаметру, работает на колебании типа E_{010} . Резонансная частота 2 ГГц. Резонатор заполнен полистиролом, материал стенок — латунь.

Определить добротность резонатора. Какова будет добротность резонатора с таким же соотношением размеров и с той же резонансной частотой при воздушном заполнении?

Ответ: 1595, 12 720.

10.32 Найти резонансную частоту и добротность коаксиального резонатора (см. рис. 10.3), работающего на основном типе колебаний. Размеры резонатора: $D = 25$ мм, $d = 8$ мм, $l = 120$ мм. Материал стенок — латунь.

Ответ: 1,25 ГГц, 2695.

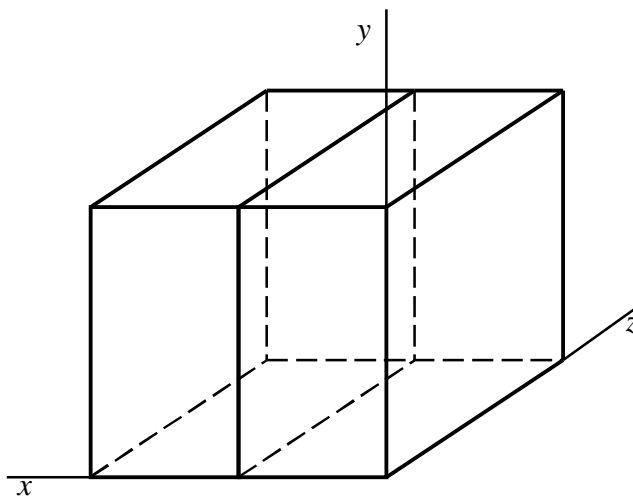


Рис. 10.15

10.33 Перестройка коаксиального резонатора (см. рис. 10.8) производится изменением зазора L . Размеры резонатора: $l = 150$ мм, $D = 36$ мм, $d = 12$ мм. Резонатор выполнен из латуни. Диапазон перестройки 500—800 МГц.

Как будет изменяться добротность резонатора в процессе перестройки?

Ответ: добротность $Q = \sqrt{w_0 m_0 S / 2} \ln(D/d)(1/D + 1/d)$ с ростом частоты изменяется от 1660 до 2100.

10.34 В цилиндрическом объемном резонаторе длиной 10 см и диаметром 12 см при $l = 0$ происходит ударное возбуждение колебание типа H_{011} .

За какое время амплитуда колебаний уменьшится в 10 раз? Стенки резонатора посеребрены.

Ответ: 7,6 мкс.

10.35 Энергия, запасенная в цилиндрическом объемном резонаторе длиной 20 см и диаметром 12 см, равна 0,01 Дж. Тип колебаний $E_{01п}$.

Определить максимальную амплитуду напряженности электрического поля и поверхностную плотность тока на боковых стенках резонатора.

Ответ: 1,93-106 В/м, $5,1 \cdot 10^3$ А/м.

10.36 Максимальная амплитуда напряженности электрического поля в прямоугольном объемном резонаторе с размерами $a = 20$ см, $b = 10$ см, $l = 30$ см равна 10^5 В/м. Материал стенок — медь. Тип колебания H_{101} .

Определить запасенную энергию и мощность потерь в стенках.

Ответ: 0,66-10~4 Дж, 43,3 Вт.

10.37 Какая максимальная энергия может быть запасена в цилиндрическом объемном резонаторе, заполненном воздухом, на колебании типа H_{011} , если пробой наступает при напряженности электрического поля 30 кВ/см? Диаметр резонатора 6 см, длина 8 см.

Ответ: $1,81 \cdot 10^{-3}$ Дж.

10.38 Цилиндрический объемный резонатор с медными стенками длиной 40 мм и диаметром 25 мм, работающий на колебании E_{011} , используется для измерения параметров диэлектриков.

Определить относительную диэлектрическую проницаемость ϵ $\tan \delta_\epsilon$, если резонансная частота резонатора 12 790 МГц, а добротность 850.

Ответ: $\epsilon = 2,6$, $\tan \delta_\epsilon = 1,1 \cdot 10^{-3}$.

10.39 Объемный резонатор используется для измерения диэлектрической проницаемости газа.

Определить разрешающую способность измерения ϵ , если измерительное устройство позволяет обнаружить смещение резонансной частоты, равное 0,1 полосы пропускания резонатора. Добротность резонатора равна 12 000.

Ответ: $\Delta\epsilon/\epsilon = 1,67 \cdot 10^{-5}$.

10.40 Резонатор представляет собой отрезок диэлектрической линии передачи, заключенный между двумя отражающими металлическими пластинами. Резонансная частота 35 ГГц, фазовая скорость в линии на этой частоте 0,92 c , погонное затухание 0,3 дБ/м.

Определить возможные значения длины резонатора и его добротность. Потерями в металлических стенках пренебречь.

Ответ: $n \cdot 3,94$ мм (n — целое число), 5760.

10.41 Кольцевой резонатор бегущей волны, предназначенный для работы на длине волны 8 мм, образован отрезком диэлектрической линии передачи длиной 2 м, свернутым в кольцо. Фазовая скорость волны 0,9 c , погонное затухание 0,5 дБ/м.

Определить интервал между частотами соседних типов колебаний и Ширину полосы пропускания каждого типа колебаний.

Ответ: 67,5 МГц, 10 МГц.

10.42 Добротность лазерного резонатора открытого типа равна $4 \cdot 10^5$.

Определить значение удельной проводимости активной среды в резонаторе, необходимое для возникновения колебаний. Длина волны генерируемых колебаний 10,6 мкм, длина резонатора 2 м.

Ответ: — $1,57 \cdot 10^{-2}$ См/м.

10.43 Определить добротность работающего на основном типе колебаний открытого резонатора с плоскими зеркалами диаметром 10 мм. Резонатор предназначен для работы на длине волны 3,39 мкм; длина резонатора 0,5 м. Потерями в зеркалах пренебречь.

Ответ: $1,735 \cdot 10^8$.

10.44 Для лазера на смеси гелия и неона, работающего на длине волны 0,63 мкм, можно использовать резонаторы с плоскими или конфокальными зеркалами. Диаметр зеркал 8 мм, длина резонатора 400 мм, коэффициент отражения от зеркал 0,985.

Сравнить значения добротности резонатора на основной моде с плоскими и конфокальными зеркалами и сделать вывод о том, какие зеркала целесообразно применять в данном случае.

Ответ: $1,31 \cdot 10^8$ для резонатора с плоскими зеркалами, $1,34 \cdot 10^8$ для резонатора с конфокальными зеркалами.

10.45 Открытый резонатор с конфокальными зеркалами работает на длине волны 2 мм. Поверхность зеркал посеребрена. Расстояние между зеркалами 500 мм.

При каком диаметре зеркал добротность резонатора будет не хуже 10^6 ?

Ответ: $2a \gg 56,6$ мм.

10.46 Чтобы оптический резонатор сохранял свои избирательные свойства, его полоса пропускания должна быть, по крайней мере, на порядок меньше расстояния между соседними резонансными частотами.

Сформулировать требования к величине коэффициента отражения от поверхности зеркала и диаметру зеркал конфокального резонатора длиной 0,5 м, предназначенного для работы на длине волны 4 мкм.

Указание: диаметр зеркал выбрать таким образом, чтобы дифракционные потери были пренебрежимо малы.

Ответ: $R > 0,92$, $2a > 3$ мм.

10.47 * Найти величину проводимости активного вещества, необходимую для возникновения генерации в лазере на длине волны 1,06 мкм. Длина резонатора 0,6 м, диаметр зеркал 20 мм, коэффициент отражения от поверхности зеркала 0,99.

Ответ: $\sigma < 8,8 \cdot 10^{-5}$ См/м.

10.48 * Активное вещество лазера имеет удельную проводимость $2 \cdot 10^{-4}$ См/м на длине волны 0,85 мкм и заполняет все пространство внутри конфокального открытого резонатора.

При какой длине лазера возникает генерация, если коэффициент отражения от поверхности зеркала равен 0,975? Дифракционными потерями пренебречь.

Ответ: $l > 0,66$ м.